

УДК 515.14



**Картеева Инна Александровна**  
студентка кафедры математики и информатики.  
Институт культуры, социальных коммуникаций и  
информационных технологий,  
Байкальский государственный университет  
г. Иркутск, Россия

## О N-МЕРНЫХ СВЯЗНЫХ ФИГУРАХ ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ ТОПОЛОГИИ. НАХОЖДЕНИЕ ФОРМУЛЫ КОЛИЧЕСТВА РЕБЕР ЧЕРЕЗ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК

**Аннотация.** В данной статье поэтапно рассматриваются многомерные фигуры: от одномерного отрезка до шестимерного гексеракта. Во время этого рассмотрения анализируются их топологические характеристики и находятся закономерности. Благодаря этому анализу и рассмотрению выводится формула нахождения количества ребер фигуры, топологически эквивалентной гиперкубу, через количество её точек, а также происходит сравнение полученной формулы с теоремой Эйлера для многогранников.

**Ключевые слова:** пространство, мерность, точка, ребро, грань, фигура.

*Karteeva Inna Alexandrovna*  
Student. Department of mathematics and Informatics. Institute of culture, social communications  
and information technology.  
Baikal State University  
Irkutsk, Russia.

## ON N-DIMENSIONAL CONNECTED FIGURES THROUGH THE PRISM OF TOPOLOGY. FINDING A FORMULA THE NUMBER OF EDGES THROUGH A NUMBER OF POINTS.

**Abstract.** In this article, multidimensional figures are considered in stages: from a one-dimensional segment to a six-dimensional hexeract. During this consideration their topological characteristics are analyzed and regularities are found. Thanks to this analysis and consideration, the formula for finding the number of edges of a figure topologically equivalent to a hypercube is derived through the number of its points, and the obtained formula is compared with Euler's theorem for polyhedra.

**Keywords:** space, dimension, point, edge, face, shape.

### Введение

Вначале была мысль – мысль о связи между количеством точек и ребер фигуры. Актуальность данного вопроса подкрепляется отсутствием подобных исследований либо абсолютно, либо в открытом доступе.

### Одномерные и двумерные фигуры

Для того чтобы нам начать разбираться в данной теме, взглянем на одномерную фигуру (отрезок или же линия, проведенная от одной точке к другой (1, с.18)), представленную на рисунке 1:

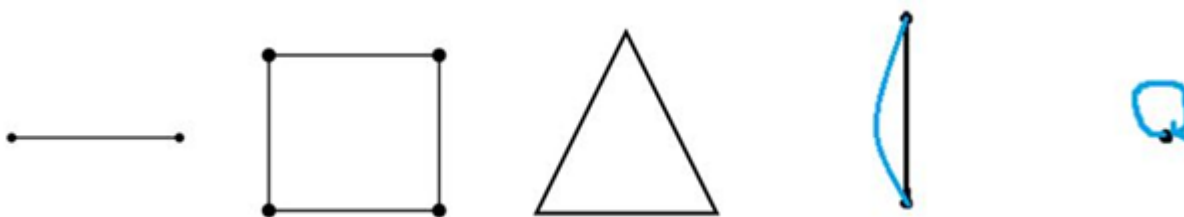


Рис. 1. Одномерная и двумерные фигуры

Как мы можем заметить, данная фигура состоит из 2 точек и 1 ребра (2, с. 54). Таким образом, количество ребер равно  $0,5 \cdot i$ , где  $i$  – это количество точек. Следом, за отрезком, представим пространство с двумерными фигурами: квадратом, треугольником, двумя точками, связанными двумя ребрами (подобно теории графов, ибо изначально данная работа должна была изучать  $n$ -мерные фигуры как топологически верные графы (2, с. 196)) и точкой, связанной самой с собой петлей (3, с. 198) (прим. рисунок 1).

Соответственно, мы можем изучить количество точек и ребер, связывающих их, у данных фигур. Таким образом, у квадрата – 4 точки-вершины и 4 ребра, у треугольника 3 вершины – 4 ребра, у фигуры, полученной из 2 точек – 2 ребра, из 1 вершины – 1 ребро соответственно. Как мы можем наблюдать, в двумерном пространстве количество ребер равно  $i$ .

### Трехмерные и четырехмерные фигуры

Теперь мы можем пойти дальше и разобрать некоторые трехмерные фигуры, шагнув на размерность выше. Рассмотрим же стандартный куб, тетраэдр (1, с. 565) и треугольную призму (рис. 2):

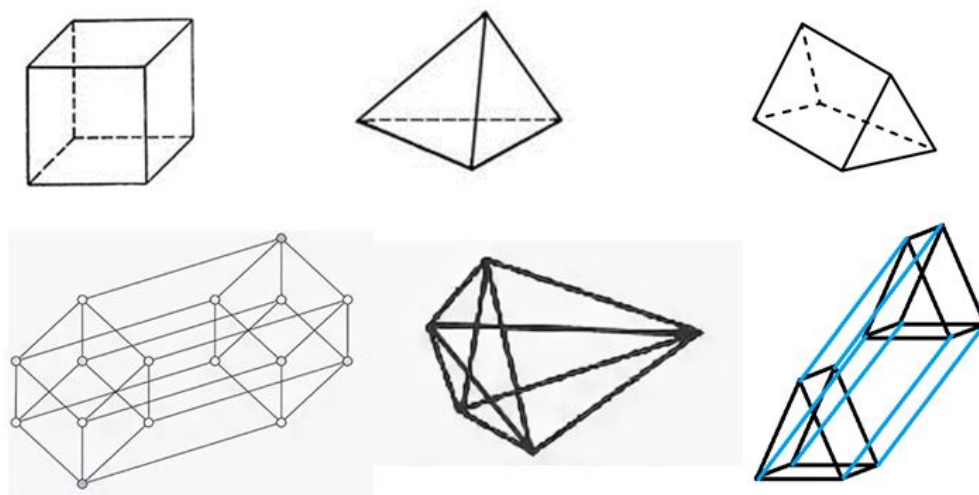


Рис. 2. Трехмерные и четырехмерные фигуры

Стоит так же заметить, что куб получен связыванием двух квадратов, треугольная призма – связыванием двух треугольников, а тетраэдр сам по себе составлен из равносторонних треугольников.

Но, возвращаясь к теме, что же мы наблюдаем? 8 точек у куба и 12 ребер. У тетраэдра – 4 точки и 6 ребер. У треугольной призмы – 6 точек и 9 ребер. Разумеется, можно вычислить и зависимость усложнения фигур от пространства к пространству, но это не является нашей задачей. Поэтому, смотрим на соотношение количества точек и ребер: количество ребер равно  $1,5 * i$ .

$0,5 * i$ ,  $1 * i$ ,  $1,5 * i$  – начинает быть видна четкая арифметическая зависимость. Но нам стоит перейти к многомерному пространству и многомерным фигурам (4, с.375), чтобы убедиться в этом ещё больше. Итак, берем тессеракт (1, с.566), симплекс (1, с.565) и четырехмерную треугольную призму (рисунок 2).

Получаем: у тессеракта: 16 точек, 32 ребра, у симплекса: 5 точек, 10 ребер, у четырехмерной треугольной призмы: 12 точек, 24 ребра. Итак, количество ребер равно  $2i$ .

На этом этапе стоит приостановить практическую часть изучения вопроса и перейти к теории. Что мы имеем?  $0,5 * i$  в 1-мерном пространстве,  $1 * i$  в 2-мерном пространстве,  $1,5 * i$  в 3-мерном пространстве и  $2 * i$  в 4-мерном пространстве. Давайте попробуем рискнуть и предположить, что в 5-мерном пространстве данная формула будет выглядеть как  $2,5 * i$ ?

### **Многомерные фигуры.**

Возьмем пентеракт (рисунок 3):

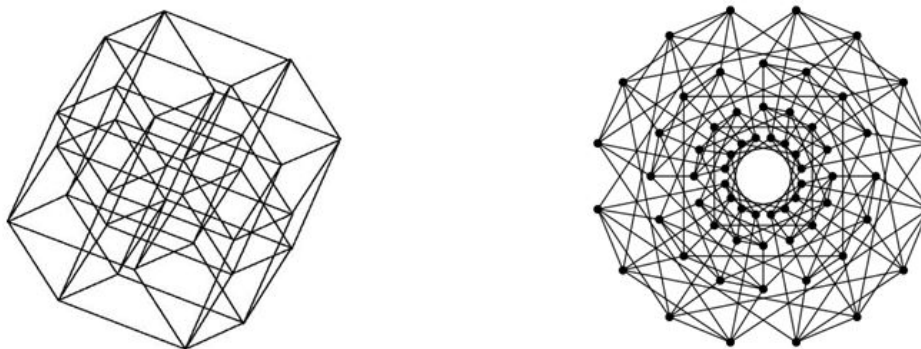


Рис. 2. Пентеракт и Гексеракт

32 точки, 80 ребер. Проверяем:  $2,5 * 32 = 80$ . Условие выполняется. Давайте предположим, что в 6-мерном пространстве получим  $3 * i$ . Обратимся для этого к Гексеракту (рисунок 3). 64 точки, 192 ребра.  $3 * 64 = 192$ .

### **Выводы.**

Получается, зависимость выяснена и остается только оформить её в виде лаконичной формулы.

Для этого берем за  $n$  – мерность пространства, за  $i$  – количество точек, а за  $R$  – количество ребер нашей связной фигуры и получаем:

$$R = (0,5 * n) * i = \frac{n}{2} * i$$

Такова формула количества ребер через количество точек многомерных фигур, топологически эквивалентных гиперкубу.

Стоит упомянуть так же теорему Эйлера для многогранников, топологически эквивалентных сфере, устанавливающую связь между числом вершин, ребер и граней (5, с.7):

$$\text{Вершины} - \text{Ребра} + \text{Грани} = 2$$

Пусть на основании этой формулы и можно вычислить количество ребер посредством знания количества вершин и граней, однако, только для многогранников, имеющих топологию сферы.

Более того, данная формула несправедлива для четырехмерного пространства и, соответственно, для пространств больших мерностей. Именно благодаря этому, выведенная мной формула может быть полезна в более глубоком понимании природы и сущности многогранников.

## Список использованной литературы

1. Гарольд Скотт Макдональд Кокстер. Введение в Геометрию. – М.: Изд-во «Наука», 1966 г., 648 стр.
2. Белых Т. И. Математика в экономике. : учеб. пособие / Т. И. Белых, А. В. Бурдуковская ; БГУ. – Иркутск : Изд-во БГУ, 2018. – 108 с. Ч. 9 : Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии.
3. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учебное пособие. – М.: Логос, 2000. – 240 с.
4. Прохоров Ю. В. Большой энциклопедический словарь по математике. – М.: Науч. издат., 1998., 847 стр.
5. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / Перевод с английского И.Н. Веселовского Автор: Имре Лакатос (Аврум Липшиц) Издательство: М.: Наука Год: 1967, с. 152.

